13/3/19

- Ομοιομορφισμοί - Ισοδύναμες μετρικές

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ λέγεται ομοιομορφισμός αν-ν

  (i) f 1-1 κ. επί

  (ii) f συνεχής

  (iii) f^{-1} συνεχής

  Συμβολ.: $X \xrightarrow[f]{\cong} Y$

  ομοιομορφισμοί

- $X \cong Y$ αν-ν $\exists f: X \to Y$ ομοιομορφισμός

  $f^{-1}: Y \to X$

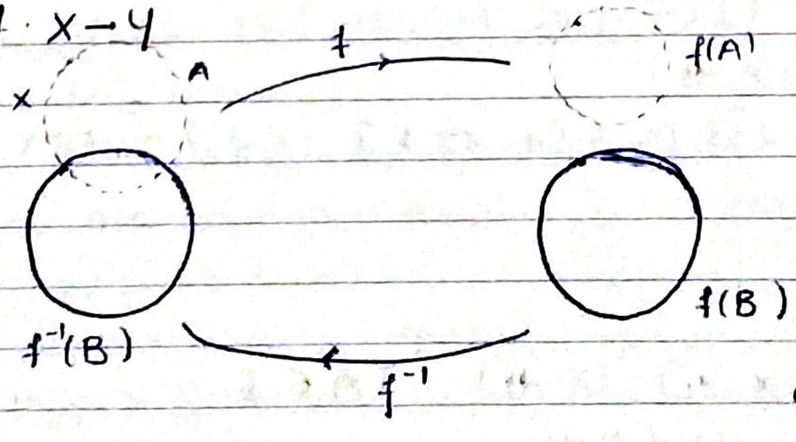
Παρατηρήσεις:

(i) f συνεχής $\Leftrightarrow f^{-1}(G) \in \tau_d \quad \forall G \in \tau_\rho$

f^{-1} συνεχής $\Leftrightarrow (f^{-1})^{-1}(E) \in \tau_\rho \quad \forall E \in \tau_d \Leftrightarrow f(E) \in \tau_\rho \quad \forall E \in \tau_d$

$\Leftrightarrow f$ ανοικτή

(ii) $f: X \to Y$



$f: P(X) \to P(Y)$

$f: X \to Y$ 1-1 κ. επί $\Leftrightarrow f: P(X) \to P(Y)$ 1-1 κ. επί

(iii) $f: X \xrightarrow{\cong} Y \longrightarrow \tau_\rho = \{f(E) : E \in \tau_d\}$

(iv) $f(f^{-1}(B)) = B$ Είναι σωστό ?

$\Downarrow$

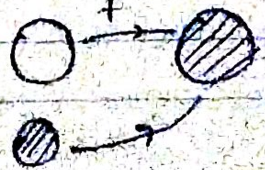
ΟΧΙ ΠΑΝΤΑ !

Ισχύει ΜΟΝΟ εάν f ΕΠΙ

Ομοίως, $f^{-1}(f(A)) = A$?

$\Downarrow$

Μόνο εάν f 1-1



$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$:

$X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$, $d =$ η διακριτή μετρική

$Y = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$, $\rho =$ η συνήθης μετρική $= |(\cdot) - (\cdot)|$

υπόχωρος

$Y \subset \mathbb{R}$

$r > 0$, $S_\rho(0, r) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \geq n_0\} \neq \{0\}$ όχι ανοικτό στο Y

$n_0 = \min\{n : n > \frac{1}{r}\}$

Έστω $f = I : X \to Y$ η ταυτοτική απεικόνιση

f 1-1 & επί & συνεχής

και

f όχι ανοικτή διότι ενώ $\{0\}$ είναι ανοικτό στο X

το $f(\{0\}) = \{0\}$ όχι ανοικτό στο Y

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: (Ισοδύναμες Μετρικές)

(X, d_1), (X, d_2)

ισοδύναμη, ομοιομορφισμός

$d_1 \sim d_2 \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \tau_{d_1} = \tau_{d_2} \Longleftrightarrow I : (X, d_1) \xrightarrow{\cong} (X, d_2)$

Πρόταση: (X, d_1), (X, d_2). Τ.Α.Ε.Ι.:

(i) $d_1 \sim d_2$

(ii) $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$:

$S_{d_1}(x, \delta_1) \subseteq S_{d_2}(x, \varepsilon)$ κ. $S_{d_2}(x, \delta_2) \subseteq S_{d_1}(x, \varepsilon)$

i) $I : (X, d_1) \to (X, d_2)$ συνεχής στο x

$\Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \underbrace{I(S_{d_1}(x, \delta))}_{= S_{d_1}(x, \delta)} \subseteq \underbrace{S_{d_2}(I(x), \varepsilon)}_{= S_{d_2}(x, \varepsilon)}$

ii) $\forall \{x_n\} \subseteq X$: $x_n \xrightarrow{d_1} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x_n$

$\left(\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{d_1} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{d_2} f(x) \\ \text{όμως για } f = I \to f(x_n) = x_n \text{ κ. } f(x) = x \end{array} \right)$

(iii) $\forall (x_n) \subseteq X$: $x_n \xrightarrow{d_1} x \Longleftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x$

Παρατήρηση (για ΑΣΚΗΣΕΙΣ):

$x_n \xrightarrow{d_1} x \iff x_n \xrightarrow{d_2} x$

Είπαμε ότι $I(x_n) = x_n$ κ. $I(x) = x$ άρα ισοδύναμα γράφουμε

$\iff I : (X, d_1) \to (X, d_2)$ συνεχής

$\iff A \in \tau_{d_2} \Rightarrow I^{-1}(A) = A \in \tau_{d_1}$

άρα $\tau_{d_2} \subseteq \tau_{d_1}$

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$:

• (X, d) , $\sigma(x,y) = \min(1, d(x,y))$

Γνωρίζ. ότι σ μετρική

Ισχύει ότι $d \sim \sigma$??

Έχουμε: $x_n \xrightarrow{d} x \iff d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$

$\iff \sigma(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$

$\iff x_n \xrightarrow{\sigma} x$ το ζητούμενο !!

Ισχύει διότι

$\exists n_0 : d(x_n, x) < 1$

Όμως $\sigma(x,y) = \min(1, d(x,y))$

άρα $\sigma(x_n, x) = d(x_n, x)$

• $\mathbb{R}^k$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$

$\rho_1(x,y) = \sum_1^k |x_i - y_i|$

$\rho_\infty(x,y) = \sup_{1 \le i \le k} |x_i - y_i|$ $\qquad \rho_1 \sim \rho_2 \sim \rho_\infty$

$\rho_2(x,y) = \left(\sum_1^k (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Παίρνω αρχικά να συγκρίνω την ρ_1 κ. ρ_∞

Ισχύει: $\rho_1(x,y) < k \cdot \rho_\infty(x,y)$ κ. $\rho_\infty(x,y) < \rho_1(x,y)$

δηλ. $\rho_\infty(x,y) < \rho_1(x,y) < k \cdot \rho_\infty(x,y)$

Τότε: $\rho_1(x_n, x) \to 0 \iff \rho_\infty(x_n, x) \to 0$ άρα $\rho_1 \sim \rho_\infty$

Όμοια: $\rho_\infty(x,y) \le \rho_2(x,y) \le k \cdot \rho_\infty(x,y)$ άρα $\rho_2 \sim \rho_\infty$

άρα $\rho_1 \sim \rho_2 \sim \rho_\infty$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ισομετρίας):

$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ λέγεται ισομετρία αν-ν $\rho(f(x),f(y))=d(x,y)$ $\forall x,y\in X$

ΑΜΕΣΕΣ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ:

(i) Εάν $f:X\to Y$ ισομετρία, τότε f 1-1, διότι εάν:

$f(x)=f(y)\Rightarrow \rho(f(x),f(y))=0\Rightarrow d(x,y)=0\Rightarrow x=y$

(ii) $X\xrightarrow{\cong} f(X)\subseteq Y$

υπόχωρος

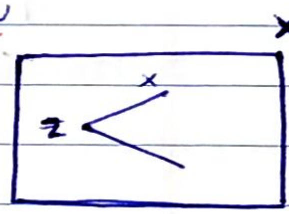
Συναρτήσεις σημείου - Συναρτήσεις όμοιες με σημείου

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος

$z\in X \rightsquigarrow \delta_z: X\to[0,+\infty)$, $\delta_z(x)=d(z,x)$

Η δ_z λέγεται συν/ση σημείου στο z

$\delta(X)=\{\delta_z : z\in X\}$



Π.χ. Έστω $X=\mathbb{R}^k$ κ' ρ_2 η μετρική που $\rho_2\longleftrightarrow\|x\|=\left(\sum_1^k x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Τότε: $\delta_0:\mathbb{R}^k\to[0,+\infty)$ με $\quad x=(x_1,\dots,x_n)$

$$\delta_0(x)=\rho_2(0,x)=\|x-0\|=\|x\|$$

Έστω ένα σημείο $z\in\mathbb{R}^k$ κ' $a,b\in\mathbb{R}^k$. Τότε:

$$\delta_z(z-b+a)=\rho_2(z,z-b+a)=\|z-(z-b+a)\|=$$
$$=\|b-a\|=\rho_2(a,b)$$

Παρατήρηση: Για να δω τι κάνει η διαφορά $|\delta_z(x)-\delta_z(y)|$:

$$|\delta_z(x)-\delta_z(y)|=|d(z,x)-d(z,y)|\le d(x,y)$$

Το παραπάνω μου λέει ότι η δ_z είναι Lipschitz με σταθ. 1 $\Rightarrow$ δ_z ομοιόμ. συν.

διότι από τριγων. ανισότητα:

$d(z,x)\le d(x,y)+d(y,z)$

ή $d(z,y)-d(z,x)\le d(x,y)$

Πρόταση: $z\in X \longmapsto \delta_z \in \delta(X)$ είναι 1-1 κ. επί

Αποδ.

$\delta_z = \delta_w \Rightarrow \delta_z(x) = \delta_w(x) \quad \forall x\in X$

άρα ισχύει κ. για $x=w$

$\delta_z(w) = d_w(w) \Leftrightarrow d(z,w) = d(w,w) = 0 \Rightarrow z = w$

Άρα 1-1

Το επί ισχύει από τον ορισμό του $\delta(X)$

Πρόταση: Έστω $z\in X$. Ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $\delta_z(b) - \delta_z(a) \le d(a,b) \le \delta_z(b) + \delta_z(a)$

(ii) $\delta_z(z) = 0 \Leftrightarrow 0 \in \delta_z(X)$

τριγων. ανισ.

Αποδ.

(i) Τριγων ανισότητα

$d(a,b) \le d(b,z) + d(b,a)$

(ii) Δεν έχουμε να αποδ., είναι προφανές

• ΟΡΙΣΜΟΣ: $u: X \to [0,+\infty)$ λέγεται όμοια με σημείου

$\Updownarrow$ ορ.

$u(x) - u(y) \le d(x,u) \le u(x) + u(y) \quad \forall x,y\in X$

π.χ. $X = \mathbb{Q}$, $d = |(\cdot)-(\cdot)|$ συνήθης μετρική

$u(x) = |\sqrt{2} - x|$, $x\in\mathbb{Q}$

Η u είναι συνήθη όμοια με σημείου:

$u(x) - u(y) = d(\sqrt{2},x) - d(\sqrt{2},y) \le d(x,y) \le d(\sqrt{2},x) + d(\sqrt{2},y)$

Πρόταση:

$u: X \to [0,+\infty)$ όμοια με σημείου

Ισχύει ότι: $u \in \delta(X) \Leftrightarrow 0 \in u(X)$

Απόδ.:

$\Rightarrow$) $u \in \delta(X) \Rightarrow u = \delta_z$, για κάποιο $z \in X$

$u(x) = \delta(x) = 0$

$u(z) = \delta_z(z) = d(z,z) = 0 \Rightarrow 0 \in u(x)$

$\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω $u(z) = 0$

$u(x) - \cancel{u(z)}^{0} \leq d(x,z) \leq u(x) + \cancel{u(z)}^{0} \quad \forall x$

$\Rightarrow u(x) \leq d(x,z) \leq u(x) \Rightarrow d(x,z) = u(x)$

$\Rightarrow u(x) = d(x,z) \overset{\text{ορ.}}{=} \delta_z(x)$

Πρόταση: $\tilde{X} = \{u: X \to [0,+\infty) \mid u$ όμοια με σημείου$\}$

$[\to$ δηλ. $u(x) - u(y) \leq d(x,y) \leq u(x) + u(y)]$

Ορίζουμε την εξής μετρική

$s: \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0,+\infty)$ με τύπο

$$s(u,v) = \sup_{x \in X} |u(x) - u(y)|$$

i) Η s είναι μετρική

ii) $z \in X \longmapsto \delta_z \in \tilde{X}$ είναι ισομετρία

Απόδ.

i) Παίρνω κάποιο $b \in X$ ($b = fix$). Τότε:

$u(x) - u(b) \leq d(x,b) \leq u(x) + u(b)$

$\Rightarrow u(x) - u(b) \leq u(x) + u(b)$

$\Rightarrow u(x) - u(x) \leq u(b) + u(b)$

Όμοια προκύπτει ότι: $\quad \forall x \in X$

$u(x) - u(x) \geq -u(b) - u(b) = -|u(b) + u(b)|$

$\Rightarrow u(x) - u(x) \leq u(b) + u(b)$

$\Rightarrow |u(x) - u(x)| \leq u(b) + u(b) = c$

ii) Α.ν.δ.ο. $S(\delta_z, \delta_w) = d(z,w)$, $z,w \in X$

$S(\delta_z,\delta_w) = \sup_{x\in X} |\delta_z(x) - \delta_w(x)|$

Έχουμε ότι:

$|\delta_z(x) - \delta_w(x)| = |d(z,x) - d(w,x)| \le d(z,w)$ $\forall x\in X$

άρα κ το $\sup_{x\in X}|\delta_z(x)-\delta_w(x)| \le d(z,w)$

Για $x=w$ παρατηρούμε ότι:

$|\delta_z(w) - \underbrace{\cancel{\delta_w(w)}}_{0}| = \delta_z(w) = d(z,w)$

ΑΡΑ: $S(\delta_z,\delta_w) = d(z,w)$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: $X \cong S(X) \subseteq (\tilde{X}, S)$

ΑΣΚΗΣΗ (6-4):

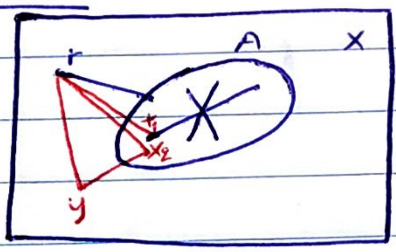
Έστω (X,d) μ.χ.

$A\subseteq X$, $A\neq\emptyset$, $2a = d(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y\in A\}$

Θέτουμε: $u(x) = d(x,A) + a$, $x\in X$

Ν.δ.ο. η u είναι συν/ση όμοια σημείου

ΛΥΣΗ:



Έχουμε ότι:

$u(x)-u(y) = d(x,A)+a-(d(y,A)+a) =$

$= d(x,A)-d(y,A) \le d(x,y)$ (1)

$d(x,A) = \inf_{x_n\in A} d(x,x_n)$

Μένει ν.δ.ο. $d(x,y)\le u(x)+u(y)$

$(u(x)+u(y) = d(x,A)+a+d(y,A)+a = d(x,A)+d(y,A)+2a)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists x_1 : d(x,A)+\frac{\varepsilon}{2} > d(x,x_1)$

$\exists x_2 : d(y,A)+\frac{\varepsilon}{2} > d(y,x_2)$

Ισχύει από τριγων. ανισ. ότι:

$d(x,y) \le d(x,x_1)+d(x_1,x_2)+d(x_2,y) < d(x,A)+\frac{\varepsilon}{2} + d(y,A)+\frac{\varepsilon}{2}+2a$

$= u(x)+u(y)+\varepsilon \Rightarrow d(x,y)\le u(x)+u(y)$ (2)

Από (1), (2) $\rightarrow$ Ζητούμενο